Matisse: визуализация задержек в Интернете в виде многообразий[1]

Стивен Ясина, Локман Саламатиан, Джошуа Мэтьюз, Скотт Андерсон, Пол Барфорд, Марк Кровелла, Уолтер Уиллинджер

Аннотация

Многообразия – это сложные топологические пространства, которые могут использоваться для представления наборов данных реальных измерений. Визуализация таких многообразий помогает иллюстрировать их топологические характеристики (например, кривизну) и даёт понимание важных свойств исходных данных (например, аномалий в измерениях).

В этой статье описывается новая методология и система для построения и визуализации многообразий, которые выводятся из фактических измерений сетевых задержек в Интернете между разными городами и спроецированы на двумерное евклидово пространство (например, географическую карту). Наш метод использует серию графов, которые фиксируют важную информацию, содержащуюся в данных, включая чётко определённые местоположения для вершин и информацию о кривизне Риччи для рёбер[2] .

Затем наш алгоритм визуализации строит криволинейную поверхность (многообразие), на которой: а) сохраняются географические положения вершин; б) значения кривизны Риччи рёбер графа определяют свойства кривизны многообразия. Итоговое многообразие выделяет области критической связности и определяет экземпляр «пространства интернет-задержек», где измерения задержки отображаются в виде геодезических линий. Мы подробно описываем наш метод и его реализацию в системе Matisse, предназначенной для создания, визуализации и манипулирования многообразиями, спроецированными на базовую карту. Мы проиллюстрируем Matisse двумя кейсами: простым тестовым примером для демонстрации ключевых концепций и визуализацией публичного Интернета США, чтобы показать практическую полезность Matisse.

Ключевые слова:

сеть, измерения Интернета, кривизна, многообразие, визуализация

Введение

При изучении сетей связи, таких как Интернет, часто встречаются наборы измерений, представляющие сеть как граф с различными атрибутами вершин и рёбер. Важный пример – графы, вершины которых вложены в двумерное евклидово пространство (то есть имеют широту и долготу), а атрибуты рёбер представляют собой измерения задержек (то есть время, которое требуется для передачи пакетов между парами узлов в определённый момент времени).

Интерпретация таких одновременно собранных измерений по рёбрам важна для понимания поведения сложной совокупности линий связи, маршрутизаторов и центров обработки данных, образующих Интернет.

Наша работа основана на гипотезе, что такие наборы данных допускают геометрическое представление в виде сложных метрических пространств в форме гладких многообразий, вложенных в трёхмерное пространство. В случае измерений сетевых задержек в Интернете мы называем такое многообразное представление **пространством интернет-задержек** и показываем, что оно открывает новые возможности как для

1 Печатается в сокращении. Оригинальная статья Matisse: Visualizing Measured Internet Latencies as Manifolds, Stephen Jasina, Loqman Salamatian +4 authors, Walter Willinger, Published in IEEE Transactions on Network and Service Management, 9 September 2025, https://arxiv.org/abs/2509.08097

2 Кривизна Риччи – понятие из дифференциальной геометрии, которое позволяет количественно оценить, насколько локально искривлено риманово (или псевдориманово) многообразие. Она тесно связана с тензором Риччи – объектом, который строится на основе тензора кривизны Римана и метрического тензора (прим. редакции).

разработки нового метода визуализации, так и для характеристики различных аспектов исследования измерений интернет-задержек [1], [2].

Многообразное представление измеренных интернет-задержек информативно благодаря контрасту с плоским евклидовым пространством. Если считать, что геопривязанные интернет-узлы приблизительно лежат на плоской двумерной евклидовой поверхности в физическом пространстве, то многообразие может показать тип и величину деформаций этой плоской поверхности, необходимых для отражения измеренных задержек.

Иными словами, можно построить визуализацию так, чтобы кратчайший путь между любыми двумя узлами на многообразии приблизительно отражал измеренную задержку между этими двумя узлами. Тогда, «проходя по многообразию», измеренные интернет-задержки между разными парами узлов могут быть достоверно восстановлены по геодезической длине между соответствующими парами узлов. Например, малые задержки часто соответствуют путям, которые ассоциируются с «прямой видимостью» или «движением по локальной евклидовой плоскости», тогда как большие задержки обычно связаны с более искривлёнными траекториями. В многообразном представлении такого пространства интернет-задержек эти пути должны проходить через «холмы и впадины», возникающие из-за деформаций евклидовой плоскости и проявляющиеся как искривлённые поверхности.

Цель нашей работы – разработать визуализацию, которая: а) вычисляется по известным местоположениям узлов и измеренным задержкам между узлами; б) представлена как многообразие, явно связанное с географией реального мира; в) позволяет макроскопически интерпретировать свойства сети, точно отражая соотношения задержек между отдельными узлами через расстояния на поверхности; г) обрабатывает одновременные измерения задержек между несколькими парами узлов и таким образом интерпретируемо фиксирует базовую структуру соответствующего пространства задержек.

По пути к этой цели мы сталкиваемся с тем, что интернет-задержки возникают в пространстве, скрытом от нас. Оно скрыто, потому что физическая инфраструктура, по которой отдельные пакеты проходят от одного узла к другому, обычно известна лишь частично. Кроме того, география физического пространства, в котором находятся узлы, влияет на структуру измеренных задержек, а точное соотношение между физическим пространством и пространством, задаваемым задержками, неизвестно.

Тем не менее, хотя задержки передачи пакетов в Интернете не обязательно симметричны и могут даже нарушать неравенство треугольника, можно предпринять шаги для решения этих проблем (например, используя в качестве базовой сущности измерения времени прохождения пакета данных в обе стороны, RTT). Поскольку масштаб таких модификаций невелик по сравнению с величинами используемых нами измерений, а их влияние на визуализации минимально, мы можем рассматривать это скрытое пространство как метрическое.

Наш подход к преодолению сложностей, связанных с оценкой задержек в Интернете, опирается на анализ различий между задержками в скрытом пространстве (то есть измеренными интернет-задержками) и задержками в физическом пространстве (то есть основанными на географическом расстоянии по карте). Мы утверждаем, что понимание этих различий даёт представление о природе сетевых измерений и свойствах сетевой инфраструктуры, лежащей в их основе. Основной инструмент, который мы используем для интерпретации этих различий и извлечения смысла, – **кривизна Оливье-Риччи** (далее – кривизна Риччи).

Наша стратегия состоит в том, чтобы использовать кривизну Риччи для построения визуализации, которая отражает как скрытое пространство задержек, так и положение узлов в известном пространстве географической карты. Мы согласуем эти две цели, используя двумерное многообразие, вложенное в трёхмерное пространство, и подбирая локальную кривизну многообразия так, чтобы она соответствовала кривизне, характерной для каждой области измерений задержек.

Полученное многообразие отражает деформацию евклидова пространства, вызванную скрытым пространством задержек; в идеале геодезические линии на многообразии приблизительно кодируют измеренные интернет-задержки.

Наш главный вклад – это **Matisse**, система визуализации, разработанная в соответствии с перечисленными выше критериями. Matisse опирается на: а) создание графов, полученных как от скрытого пространства задержек, так и от базового пространства карты; б) характеристику полученных графов с помощью кривизны Риччи; в) использование полученных значений кривизны Риччи для определения деформации многообразия.

Чтобы проиллюстрировать функциональность, гибкость и практическую пользу Matisse, мы приводим два примера. В первом примере используется упрощённая сеть, в которой не учитывается конкретное географическое расположение узлов. Этот пример приводится для того, чтобы продемонстрировать основные аспекты создания и визуализации многообразий. Второй кейс основан на измерениях задержек пакетов между множеством хостов с известными координатами в общедоступном Интернете США. Полученное многообразие представляет собой отображение предполагаемого пространства интернет-задержек и выделяет интересные области внутри этого топологического пространства.

Наконец, мы используем многообразия, построенные по измеренным интернет-задержкам, чтобы показать, что наш метод создаёт поверхность, правильно отображающую скрытое метрическое пространство. Мы показываем, что геодезические расстояния между вершинами, рассчитанные на поверхности многообразия, более точно отражают измеренные задержки, чем расстояния по прямой. Кривизна полученного многообразия кодирует измеренную интернет-задержку между любыми двумя узлами в виде кратчайшего пути между ними по поверхности многообразия.

Методология

В этом разделе мы представляем нашу методологию создания многообразий скрытых метрических пространств и описываем систему Matisse, реализующую эту методологию. Хотя наш метод и система визуализации являются универсальными в том смысле, что могут применяться к графам, спроецированным на любую евклидову поверхность. Далее мы сосредоточимся на графах, спроецированных на географические поверхности, поскольку они интуитивно понятны и являются наиболее подходящим применением для нашей методики.

Обзор

Первое ключевое наблюдение состоит в том, что пространство интернет-задержек напоминает пространственную карту, где каждое подключённое устройство выступает в роли точки. Эти точки размещаются на основе их физических местоположений и сетевой задержки между ними (латентности).

Латентность пути в обе стороны показывает, сколько времени требуется данным, чтобы дойти от одной точки до другой и вернуться. На него влияют такие факторы, как перегрузка сети, методы маршрутизации и доступность инфраструктуры. В регионах, где инфраструктура отсутствует или недостаточна, связность становится нестабильной, подобно тому, как физический ландшафт может образовывать впадины или складки из-за эрозии.

Это явление создаёт особый эффект в нашем представлении: оно заставляет пространство интернет-задержек изгибаться или искривляться. Эта кривизна, напоминающая описание формы пространства-времени в общей теории относительности, позволяет интуитивно смоделировать искажение между физическим пространством и пространством задержек.

Кривизной Риччи в каждой точке пространства измеряется, насколько пространство отклоняется от плоского. В непрерывном пространстве для описания кривизны в каждой точке используются тензоры, показывающие форму пространства во всех точках: собирается как впадина, простирается как плоскость или скручивается как седло. Основная идея Matisse – использовать эту аналогию с кривизной и многообразиями для создания эффективного метода просмотра и анализа пространства задержек.

Преодоление разрыва между непрерывными и дискретными параметрами имеет решающее значение, особенно при попытке представить непрерывные геометрические характеристики Интернета с помощью дискретных измерений между контрольными точками. В нашем решении используется новый метод определения дискретной кривизны по этим контрольным точкам [1] (описан в подразделе «Входные и выходные данные»), а также применение сеток для преодоления разрыва между дискретными и непрерывными параметрами. Тонко настраивая уровень детализации сетки, можно точнее представлять непрерывные аспекты кривизны. При работе с двумерными поверхностями в трёхмерном пространстве мы заменяем кривизну Риччи эквивалентной гауссовой кривизной, свойства которой более удобны для вычислительных задач. Этот подход позволяет не только представить структуру Интернета через геометрические характеристики, но и оценивать и анализировать сеть способом, согласующимся с нашим пониманием пространства и кривизны в непрерывном мире. В этом разделе мы описываем, как генерируются наши визуализации, применяя подход «снизу вверх» – от необработанных измерений задержек до конечного результата.

Входные и выходные данные

Matisse принимает на вход список геопривязанных контрольных точек (то есть широт и долгот) и набор измеренных значений времени прохождения данных в обе стороны между ними. Вместе они образуют почти полный взвешенный граф (почти полный из-за возможных отсутствующих измерений).

Дополнительные входные данные для Matisse – это управляющие параметры: ε; λ_»smooth» ; r; инициализация; расстояние кластеризации; число вершин в сетке.

Выбор этих гиперпараметров влияет на свойства результирующего многообразия.

Matisse создаёт взвешенный простой граф G=(V,E) как промежуточный результат. Вершины V представляют точки наблюдения, а рёбра E определяются с помощью пороговой обработки. Вес каждого ребра e E равен его кривизне Риччи κ_»Ricci» (e). Т.е. алгоритмами пороговой фильтрации и вычисления кривизны формируется этот промежуточный граф.

На выходе Matisse возвращает треугольную сетку, представляющую многообразие, в котором отражены значения κ_»Ricci» и каждая вершина v V имеет соответствующее местоположение π(v).

Реализация

Фронтенд приложения Matisse написан на HTML, CSS и JavaScript. Мы используем графическую библиотеку three.js [3] для построения визуализации на основе треугольной сетки. Мы накладываем карту мира на плоскость как текстуру с помощью OpenLayers [4], чтобы получить данные карты.

Бэкенд полностью написан на Python. Мы активно используем стандартные библиотеки: NetworkX, NumPy, scikit-learn и SciPy, – для общих вычислений. Для вычисления кривизны Риччи мы дополнительно используем библиотеку POT [5].

Код Matisse выложен в открытом доступе на GitHub [6].

Matisse в действии

Мы проиллюстрируем работу Matisse и применимость нашей техники визуализации многообразий на примере двух конкретных исследований. В первом из них используются простые графы, чтобы сосредоточиться на ключевых аспектах генерации и уточнения многообразий. Второй кейс касается представления многообразиями наборов измерений интернет-задержек между узлами в публичном Интернете США.

Аналогичные исследования, направленные на изучение частных магистральных инфраструктур трёх крупных сетей облачных провайдеров, описаны в [1].

Тестовая сеть

Наш первый кейс основан на простом графе, показанном на рисунке 1a. Граф имеет три области «плотной» связности, обозначенные рёбрами с положительной кривизной (синими). Области соединены связями с отрицательной кривизной (красными). Граф загружается в Matisse с координатами узлов на простой евклидовой плоскости.

Matisse генерирует многообразие для графа, показанное на рисунке 1b, где граф проецируется на поверхность.

Рисунок 1c показывает эффект, который наложение кривизны оказывает на геодезические линии. Как подсказывает интуиция, геодезические траектории притягиваются к областям отрицательной кривизны. Эти рёбра отрицательной кривизны являются критически важными для сетевой связности. Иными словами, геодезические пути приблизительно совпадают с кратчайшими путями, найденными в сети.

Такие простые примеры очень полезны, потому что позволяют исследовать влияние изменения гиперпараметров на характеристики результирующего многообразия. Например, эксперименты с размером сетки показывают, что слишком грубая сетка не находит искомые особенности, такие как ярко выраженные седловые точки, но, с другой стороны, увеличение детализации может привести к снижению эффективности модели. Конечно, увеличение степени детализации увеличивает и время вычислений. На практике для выбора наиболее грубого уровня детализации, при котором ещё сохраняются желаемые характеристики, зачастую приходится экспериментировать с различными размерами сетки.

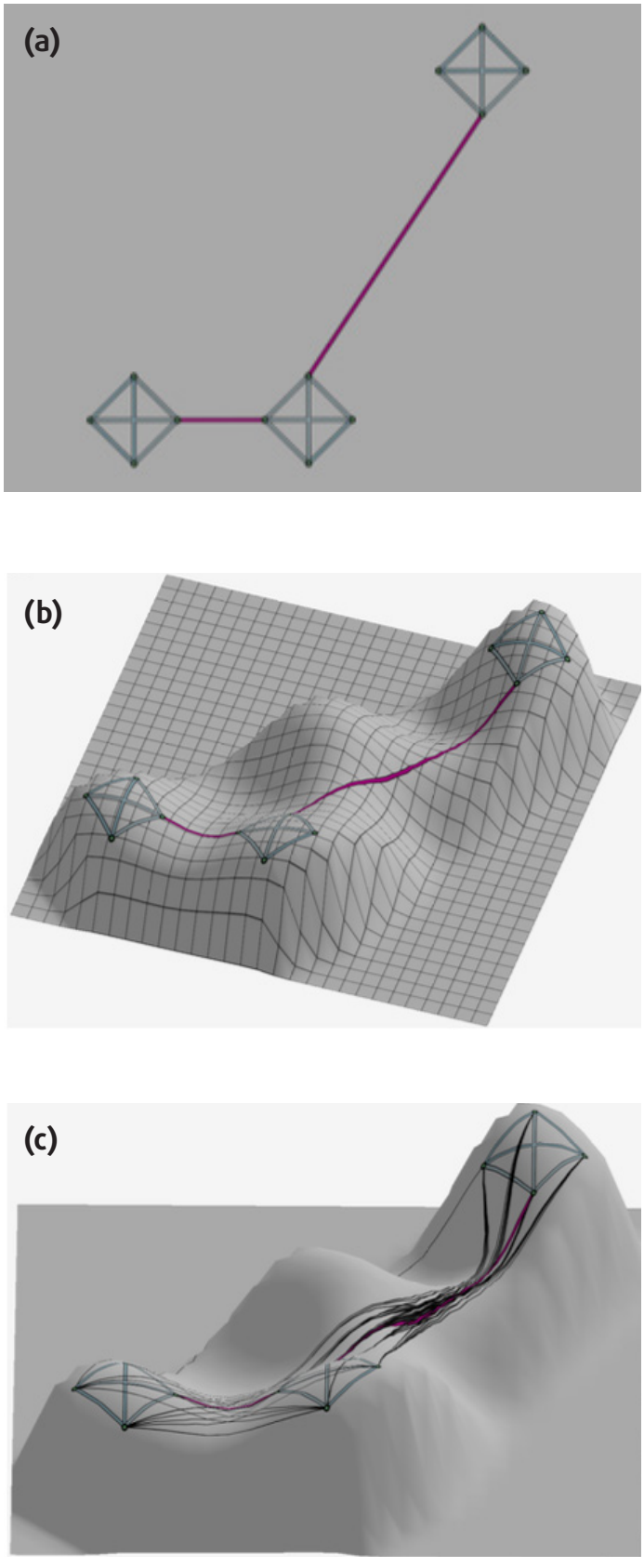

Рис. 1. Тестовая сеть и результирующее многообразие. (a) Сама сеть. Синие связи имеют положительную кривизну; красные связи имеют отрицательную кривизну. (b) Тестовое многообразие. (c) Тестовое многообразие с геодезическими путями, проведёнными чёрным цветом. Обратите внимание на притяжение путей к седловинам.

Измеренное пространство задержек для публичного Интернета США

Структура связности Интернета много лет является предметом интенсивного изучения (например, см. [7], [8] и ссылки в них). Один из способов рассмотрения интернет-связности – построить граф на основе измерений задержки прохожде-

ния пакетов в оба конца между полным набором точек наблюдения, распределённых по всей сети, с использованием стандартного инструмента ping [9]. Эта простая перспектива может дать полезное понимание интернет-связности, которое можно высветить в визуализации многообразия.

Для создания визуализации многообразий пространств интернет-задержек в Matisse мы организуем данные следующим образом. Сначала мы используем инфраструктуру **RIPE Atlas** [10], чтобы собрать измерения RTT в выбранном наборе из 21 точки наблюдения в континентальной части США. Эти точки наблюдения географически распределены по основным крупным городским районам США и физически соединены друг с другом магистральными волоконно-оптическими каналами, которые обычно проложены вдоль основных шоссе и железных дорог [11].

Для Matisse важно, что географические местоположения всех точек наблюдения заранее известны. Это позволяет вычислить большой круг дистанций (GCD) между точками наблюдения. Затем мы вычисляем большой круг задержек (GCL) между двумя точками, деля GCD на 2/3 c, где c – скорость света, а 2/3 c – скорость света в оптическом волокне. Потом мы вычисляем остаточную задержку для каждой пары точек наблюдения. Мы определяем её как минимальную задержку, измеренную за некоторый фиксированный период времени, минус GCL.

Мы генерируем визуализации этого пространства интернет-задержек в Matisse, вводя координаты узлов и значения кривизны Риччи. Мы определяем связность между узлами, выбирая рёбра с остаточными задержками выше указанного порога.

Начиная с небольшого остаточного порога и постепенно увеличивая его, можно создать серию визуализаций многообразий, демонстрирующих различные особенности связности в базовой сети (то есть в Интернете США).

На рисунке 2 показано пространство интернет-задержек в США, сгенерированное Matisse. Базовая карта и граф масштабированы и ориентированы таким образом, чтобы местоположения вершин графа были правильно выровнены по карте. Рисунок 2 показывает многообразие для связности при низком пороге остаточной задержки 10 мс (то есть связи задаются только там, где остаточная задержка близка к GCL). На этом изображении показаны области эффективной связности вдоль Восточного побережья и выделены седловые области с отрицательной кривизной Риччи, которые соответствуют магистралям, пересекающим Средний Запад и Юг. В этих регионах преобладают внутрирегиональные оптоволоконные линии, где соседние узлы обычно непосредственно соединены друг с другом.

Matisse выявляет двойственную природу связности: области, характеризуемые рёбрами с положительной кривизной Риччи, демонстрируют плотно взаимосвязанную инфраструктуру, тогда как отрицательно искривлённые рёбра выделяют географические проблемы и инфраструктурные ограничения. Эти результаты подчёркивают значительное влияние географии на производительность Интернета США.

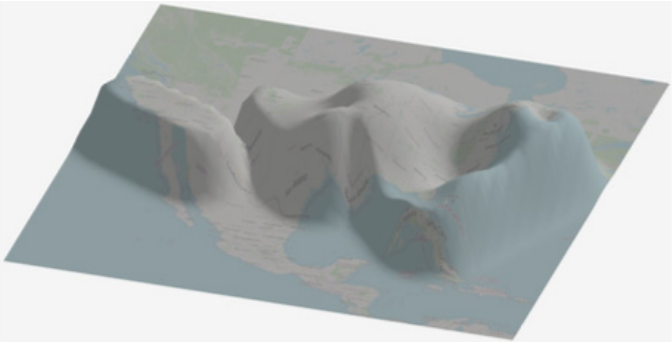

Рис. 2. Визуализация на основе Matisse экземпляра пространства интернет-задержек, публичный Интернет США. Более высокие области на северо-востоке указывают на более плотное соединение с малыми задержками (например, геодезические линии находятся в зоне прямой видимости), а долина, разделяющая страну на две части, указывает на область с редким, но критически важным соединением между восточной и западной частями США, что приводит к увеличенным задержкам (например, геодезические линии находятся далеко от зоны прямой видимости).

Итоги и будущая работа

Визуализации многообразий, полученных на основе данных реальных измерений, могут улучшить наше понимание базовых характеристик этих измерений и выявить важные свойства, такие как аномалии или другие необычные аспекты системы, в которой проводились измерения.

В этой статье мы описали методологию создания многообразных представлений плоских графов, которые включают координаты вершин и значения кривизны Риччи на рёбрах. Наша методология генерирует многообразие с гладкой поверхностью, наследующей характеристики кривизны базового графа и сохраняющей местоположения вершин. Важно, что многообразие позволяет восстанавливать исходные измерения и вычислять расстояния, которые не были включены в исходные данные.

Мы реализовали нашу методологию в системе, которую назвали Matisse. Она генерирует визуализации многообразий и может применяться итеративно для оценки систем в различных топологических конфигурациях. Для демонстрации нашего метода и Matisse мы представили примеры. Они включают тестовую сеть, используемую для иллюстрации основных аспектов функциональности Matisse. Чтобы показать полезность и гибкость инструмента, мы также применили Matisse к графам, полученным на основании измеренных задержек в публичном Интернете США.

В будущей работе мы планируем использовать Matisse для изучения других типов интернет-измерений через их многообразные представления. Мы также намерены исследовать использование Matisse для улучшения понимания других географически распределённых киберфизических критических инфраструктур, таких как транспортные и энергетические сети.

Список литературы:

[1] L. Salamatian, S. Anderson, J. Matthews, P. Barford, W. Willinger, and M. Crovella, «Curvature-based Analysis of Network Connectivity in Private Backbone Infrastructures», in Proc. ACM Meas. Anal. Comput. Syst., 2022.

[2] L. Salamatian, S. Anderson, J. Mathews, P. Barford, W. Willinger, and M. Crovella, «A manifold view of connectivity in the private backbone networks of hyperscalers», Commun. ACM, vol. 66, no. 8, p. 95–103, jul 2023, https://doi.org/10.1145/3604620

[3] Ricardo Cabello (Mr.doob), «three.js», first released in 2010, continuously updated, accessed: 2023-11, https://github.com/mrdoob/three.js/

[4] «Openlayers api», 2021, https://openlayers.org/

[5] R. Flamary, N. Courty, A. Gramfort, M. Z. Alaya, A. Boisbunon, S. Chambon, L. Chapel, A. Corenflos, K. Fatras, N. Fournier, L. Gautheron, N. T. Gayraud, H. Janati, A. Rakotomamonjy, I. Redko, A. Rolet, A. Schutz, V. Seguy, D. J. Sutherland, R. Tavenard, A. Tong, and T. Vayer, «Pot: Python optimal transport», Journal of Machine Learning Research, vol. 22, no. 78, pp. 1–8, 2021, http://jmlr.org/papers/v22/20-451.html

[6] S. Jasina, J. Mathews, and L. Salamatian, August 2025, https://github.com/StephenJasina/linear-geodesic-optimization

[7] W. Willinger and M. Roughan, «Internet topology research redux», Recent Advances in Networking, 2013.

[8] B. Huffaker, D. Plummer, D. Moore, and K. Claffy, «Topology discovery by active probing»,"Proceedings 2002 Symposium on Applications and the Internet (SAINT) Workshops, 2002.

[9] «ping (networking utility)», 2021, https://en.wikipedia.org/wiki/Ping (networking utility)

[10] RIPE Atlas, 2021, https://atlas.ripe.net

[11] R. Durairajan, S. Ghosh, X. Tang, P. Barford, and B. Eriksson, «Internet Atlas: A Geographic Database of the Internet», in Proceedings of the 5th ACM Workshop on HotPlanet. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2013.

Приложение. Дополнительные примеры применения в реальном мире

Дополнительные виды измеренного пространства задержек для публичного Интернета США

На рисунке 3 представлена справочная карта опорных точек RIPE Atlas в США.

Одно из важных преимуществ Matisse как инструмента – его интерактивные возможности. Перемещая и вращая камеру, пользователь может избежать проблем, вызванных окклюзией. Из-за ограничений формата документа мы не можем полностью продемонстрировать возможности Matisse здесь. Однако мы предоставляем несколько возможных альтернативных видов на примерах из США – рисунки 2-4.

Рисунки 4b и 4c показывают многообразия для связности при более высоком остаточном пороге (то есть с учётом каналов с остаточными задержками, значительно превышающими GCL). Эти рисунки дают более детальное представление об Интернете США, чем рисунки 1 и 4a, и позволяют увидеть региональные различия внутри единой национальной сети связи. В частности, мы идентифицируем чёткие сёдла в географических областях, таких как Скалистые горы и части юга США (например, дельта Миссисипи), где рельеф местности препятствует развёртыванию обширной физической инфраструктуры и ограничивает маршруты ВОЛС небольшим числом каналов, обычно пролегающих вдоль немногих существующих автомагистралей между штатами или железнодорожных путей.



Рис. 3. Географическая карта якорей RIPE Atlas и магистральной волоконно-оптической сети в США.

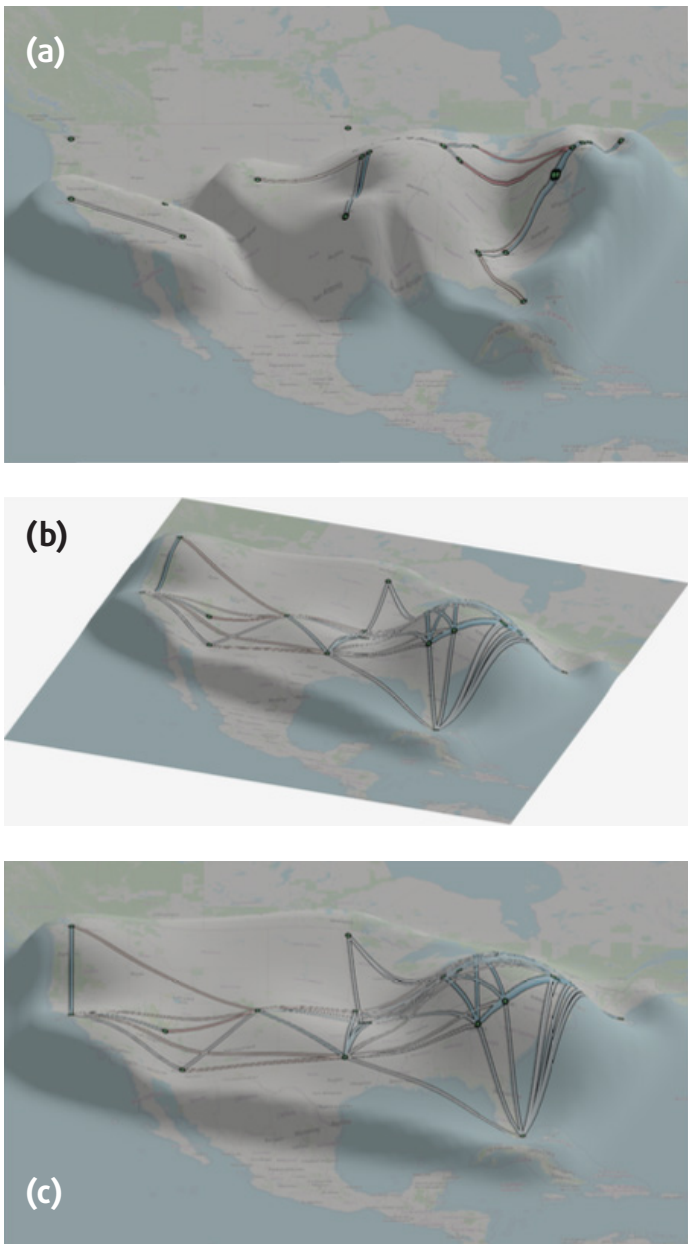

Рис. 4. Многообразные представления публичного Интернета США при разных порогах остаточной задержки. (a) Пространство интернет-задержек США при низком пороге остаточной задержки. (b) Пространство интернет-задержек США при высоком пороге остаточной задержки. (c) Альтернативный вид пространства интернет-задержек США при высоком пороге остаточной задержки.

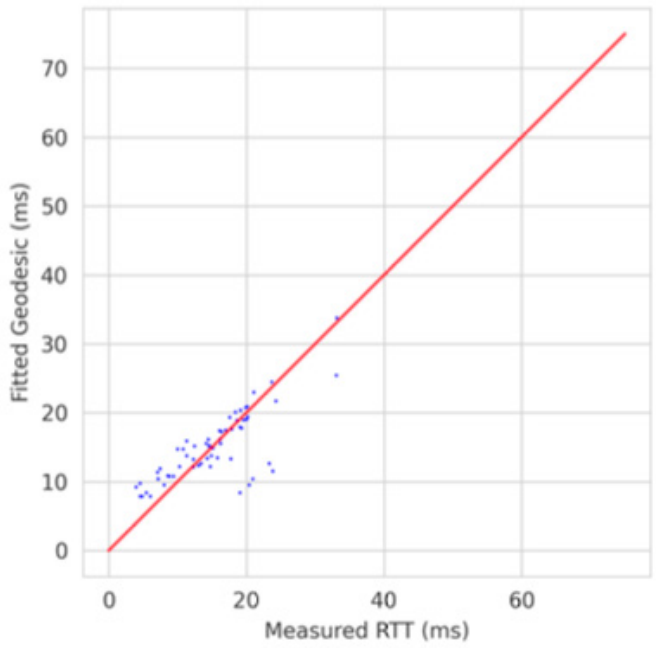

Рис. 5. Сопоставление вычисленных геодезических с измеренными задержками для данных США с порогом задержки 10 миллисекунд.

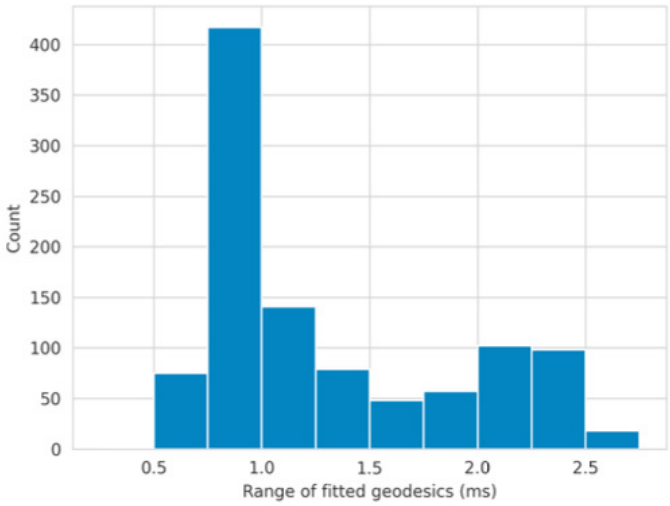

Рис. 6. Диапазоны вычисленных геодезических задержек в миллисекундах для фиксированных пар городов за две недели. Данные из набора США с порогом задержки 22 миллисекунды.

Графическое сравнение RTT и геодезических расстояний

Рисунок 5 показывает, что геодезические расстояния, полученные из нашего многообразия, в целом отражают измеренные RTT. Рисунок 6 отображает стабильность геодезических расстояний на промежутке нескольких недель.

Измеренное пространство задержек для публичного Интернета Европы

В другом примере мы рассматриваем публичный европейский Интернет. Как и в нашем исследовании публичного Интернета США, мы используем данные RIPE Atlas для построения графа связности и генерации многообразий с помощью Matisse.

На рисунке 7 показаны многообразия с уменьшенным и увеличенным масштабом для среднего порога остаточной задержки (5 мс) с использованием кластеризованной входной сети. При таком пороге мы видим небольшие островки связности в пределах крупных городских агломераций, а также

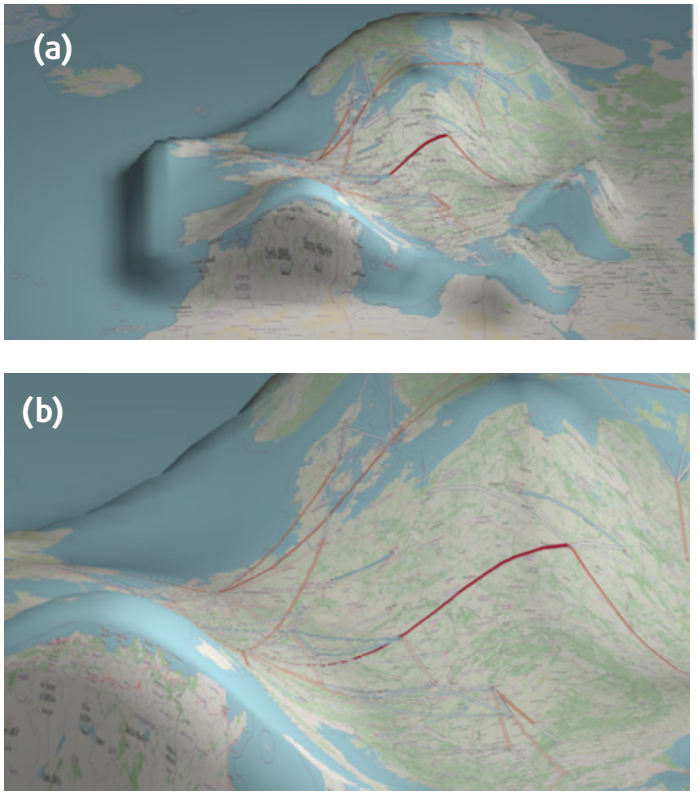

Рис. 7. Многообразные представления европейского публичного Интернета при среднем пороге остаточной задержки (5 мс) с использованием кластеризованной входной сети. (a) Пространство интернет-задержек Европы. (b) Увеличенный участок пространства интернет-задержек Европы.

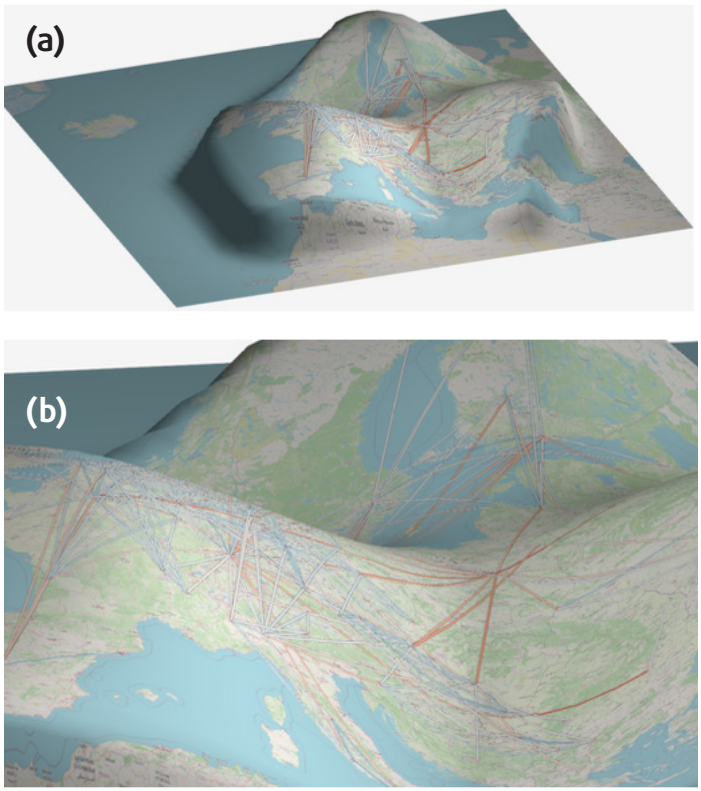

Рис. 8. Многообразные представления европейского публичного Интернета при высоком пороге остаточной задержки (8 мс) с использованием кластеризованной входной сети. (a) Пространство интернет-задержек Европы. (b) Увеличенный участок пространства интернет-задержек Европы.

рёбра с отрицательной кривизной, которые служат мостами связности между этими агломерациями. Эти рёбра интуитивно представляют физические каналы, связывающие разные сетевые кластеры, и представляют «важные» связи в сети.

Рисунок 8 показывает уменьшенный и увеличенный виды публичного Интернета Европы, сгенерированные при относительно высоком пороге остаточной задержки (8 мс) с использованием кластеризованной входной сети. Благодаря выбранному порогу результирующий граф является относительно плотным с точки зрения связности.

Визуализация многообразия показывает, насколько плотно связаны регионы, соответствующие Западной Европе и Скандинавии, что проявляется большими холмами, отражающими положительную кривизну Риччи на графе. Визуализация также подчёркивает относительно недостаточную связность в Восточной Европе, о чём свидетельствует седловидная форма в этом регионе.

Разнообразные визуализации на рисунках 7 и 8 подчёркивают разные аспекты связности в Европе. Matisse был специально разработан для облегчения изучения и анализа этого при различных уровнях детализации, как объясняется в [1].

Об авторах:

Стивен Ясина, Университет Висконсин-Мэдисон, США -
Stephen Jasina, University of Wisconsin-Madison

Локман Саламатиан, Колумбийский университет, США -
Loqman Salamatian, Columbia University

Джошуа Мэтьюз Университет Карнеги-Меллон, США -
Joshua Mathews, Carnegie Mellon University

Скотт Андерсон Университет Висконсин-Мэдисон, США -
Scott Anderson, University of Wisconsin-Madison

Пол Барфорд, Университет Висконсин-Мэдисон, США -
Paul Barford, University of Wisconsin-Madison

Марк Кровелла, Бостонский университет, США -
Mark Crovella, Boston University

Уолтер Уиллинджер, NIKSUN Inc. , США -
Walter Willinger, NIKSUN Inc.